PROSES BERCABANG DAN APLIKASINYA DALAM PENENTUAN PELUANG BERTAHAN SUATU MARGA

Andri Suryana
andri_16061983@yahoo.com
Hp. 081381240205
Program Studi Pendidikan Biologi – Fakultas Teknik, Matematika dan IPA
Universitas Indraprasta PGRI

Abstract. *This research introduces branching processes as a stochastic process for estimating the number of the population of individuals at any generation "n". One of the most interesting applications of branching processes is calculating the probability of eventual extinction. In probability theory, a branching process is a Markov chain that models a population in which each individual in generation "n" produces some random number of individuals in generation* n + 1*, according to a fixed probability distribution that does not vary from individual to individual. Branching processes are used to model reproduction. A central question in the theory of branching processes is the probability of ultimate extinction, where no individuals exist after some finite number of generations.*

Keywords: *branching process, stochastic process, discrete time markov chain*

PENDAHULUAN

Latar Belakang

Dalam kehidupan sehari-hari terdapat banyak hal yang merupakan proses stokastik. Proses stokastik berkaitan dengan peluang suatu kejadian, di mana kejadian pada waktu yang akan datang tidak dapat diprediksi secara pasti. Salah satu kasus khusus dari proses Stokastik adalah rantai Markov dengan waktu diskret.

Rantai Markov adalah suatu model stokastik yang diperkenalkan oleh seorang matematikawan Rusia yang bernama A.A. Markov pada awal abad ke-20. Dengan menggunakan proses Markov, dimungkinkan untuk memodelkan fenomena stokastik dalam dunia nyata yang berkembang menurut waktu. Masalah dasar dari pemodelan stokastik dengan proses Markov adalah menentukan deskripsi *state* (keadaan) yang sesuai, sehingga proses stokastik yang berpadanan akan benar-benar memiliki apa yang disebut sifat markov (*Markovian property*), yaitu pengetahuan terhadap *state* saat ini adalah cukup untuk memprediksi prilaku stokastik dari proses di waktu yang akan datang. Teori dari proses Markov ini dapat diterapkan di berbagai bidang ilmu, seperti biologi, ekonomi, riset operasi, dan sebagainya.

Sebagai contoh dalam biologi, suatu populasi akan mengalami kepunahan pada waktu tertentu jika jumlahnya menurun menuju nol. Kasus tersebut dapat dimodelkan dalam proses stokastik yaitu Model Rantai Markov dengan waktu diskret yang dikenal dengan proses bercabang (*branching process*).

Perumusan Masalah

Adapun masalah yang diajukan dalam penelitian ini adalah (1) Bagaimanakah sifat-sifat statistika dari proses bercabang (nilai harapan dan ragam) beserta bukti matematisnya? (2) Bagaimanakah aplikasi dari proses bercabang dalam menentukan peluang bertahan suatu marga?

Tujuan Penelitian

Adapun tujuan penelitian ini adalah untuk menemukan dan menganalisis secara empiris tentang : (1) Sifat-sifat statistika dari proses bercabang (nilai harapan dan ragam) beserta bukti matematisnya, serta (2) Aplikasi dari proses bercabang yaitu menentukan peluang bertahan suatu marga.

TINJAUAN PUSTAKA

Proses Stokastik

Menurut Mangku (2005 : 9), proses Stokastik $\{X_t : t \in T\}$ yang terdefinisi pada ruang peluang (Ω, F, P) adalah suatu himpunan dari peubah acak yang memetakan suatu ruang contoh Ω ke ruang *state S*.

Untuk setiap t pada gugus indeks T, $X(t)$ adalah suatu peubah acak. Untuk notasi t sering diinterpretasikan sebagai waktu dan $X(t)$ sebagai keadaan (*state*) dari proses pada waktu *t*. Ruang *state S* dapat berupa gugus bilangan bulat atau gugus bilangan real.

Rantai Markov dengan Waktu Diskret

Menurut Mangku (2005 : 11), jika (Ω, F, P) adalah ruang peluang dan S adalah ruang *state,* maka proses stokastik $\{X_t : t \geq 0\}$ dengan ruang *state* S disebut rantai Markov dengan waktu diskret $\forall t$ berlaku :

$$P(X_{t+1} = j \mid X_t = i_t, X_{t-1} = i_{t-1}, ..., X_0 = i_0)$$
$$= P(X_{t+1} = j \mid X_t = i)$$

untuk semua kemungkinan nilai dari $i_0, i_1, ..., i_{t-1}, i_t; j \in S$.

Persamaan tersebut dapat diinterpretasikan bahwa untuk suatu rantai markov, sebaran bersyarat dari sembarang *state* yang akan datang X_{n+1} dengan syarat *state* sebelumnya $X_0, X_1, ..., X_{n-1}$ serta state sekarang X_n adalah bebas terhadap semua *state* sebelumnya, dan hanya tergantung dari *state* sekarang. Hal ini disebut sifat Markov (*Markovian property*).

Proses Bercabang (*Branching Process*)

Menurut Ross (2000 : 202-203), proses bercabang merupakan salah satu bentuk khusus dari rantai Markov dengan waktu diskret $\{X_n, n = 0,1,2,...\}$ yang ruang *state*nya adalah bilangan bulat tak negatif. Pada proses ini, X_n disebut sebagai ukuran populasi pada waktu n.

METODE

Metode penelitian yang digunakan berbentuk kualitatif dan merupakan penelitian studi literatur. Adapun materi penelitian ini diambil dari buku yang berjudul **"** *Introduction to Probability Models***"** oleh **S. M. Ross.**

Untuk aplikasi proses bercabang dalam penentuan peluang bertahan suatu marga, sampel diambil dari satu marga menggunakan sampling *purposive*. Adapun jumlah sampel dalam penelitian ini adalah 67 responden dari marga yang sama di wilayah Jakarta timur. Responden yang dipilih harus sudah mempunyai keturunan dan selanjutnya didata jumlah keturunannya untuk digunakan dalam penentuan peluang bertahan dari marganya.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Model

Asumsi-asumsi yang digunakan untuk menyederhanakan pemodelan :

1) Untuk waktu $n = 0$ hanya ada 1 individu. Dengan kata lain, ukuran populasi pada generasi ke-0 adalah 1 dan dinotasikan dengan $X_0 = 1$.
2) Individu hidup untuk 1 unit waktu, kemudian pada waktu $n = 1$ meninggal dalam proses reproduksi (menghasilkan keturunan) karena faktor

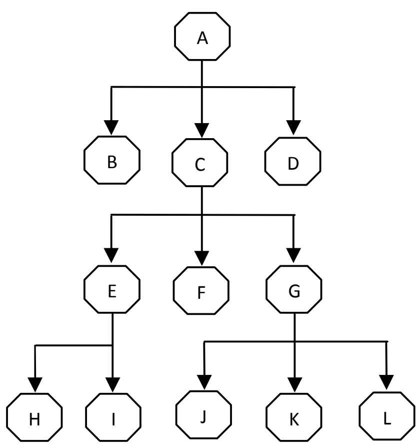
lingkungan dan digantikan oleh keturunan-keturunannya.

3) Keturunan-keturunan yang dihasilkan mempunyai riwayat hidup yang sama.

Misalkan X_n adalah ukuran populasi pada generasi ke-*n*. Misalkan pula $Z_i, i = 1, 2, ..., X_1$ adalah peubah acak yang saling bebas dan memiliki sebaran peluang yang sama, menyatakan banyaknya keturunan yang dihasilkan oleh individu ke-*i* pada generasi pertama. Secara umum, jika $Z_i, i = 1, 2, ..., X_{n-1}$ menyatakan banyaknya keturunan yang dihasilkan oleh individu ke-*i* pada generasi ke-*n*, maka ukuran populasi pada generasi ke-*n* dapat dinotasikan sebagai berikut :

$$X_n = Z_1 + ... + Z_{X_{n-1}} = \sum_{i=1}^{X_{n-1}} Z_i.$$

Ilustrasi :



Berdasarkan diagram tersebut, diketahui bahwa :

$$X_0 = 1 \Rightarrow \{A\}$$
$$X_1 = 3 \Rightarrow \{B, C, D\}$$
$$X_2 = 3 \Rightarrow \{E, F, G\}$$
$$X_3 = 5 \Rightarrow \{H, I, J, K, L\}.$$

Misalkan μ dan σ^2 berturut-turut menyatakan nilai harapan dan ragam dari banyaknya keturunan yang dihasilkan oleh setiap individu yang didefinisikan sebagai berikut :

$$\mu = E[Z_1] = \sum_{j=0}^{\infty} jP(Z_1 = j)$$

$$\sigma^2 = Var(Z_1) = \sum_{j=0}^{\infty} (j - \mu)^2 P(Z_1 = j).$$

Penentuan Nilai Harapan dari Ukuran Populasi pada Generasi ke-*n*

Untuk menentukan nilai harapan dari ukuran populasi pada generasi ke-*n*, $n = 1, 2, \ldots$, diperlukan Lema 1 berikut :

Jika *X* dan *Y* adalah dua peubah acak, maka nilai harapan dari *X* dapat ditentukan melalui nilai harapan *X* dengan syarat *Y* sebagai berikut :

$$E[X] = E\left[E\left[X \mid Y\right]\right]$$

Adapun nilai harapan dari ukuran populasi pada generasi ke-*n* dapat ditentukan sebagai berikut :

Misalkan X_n menyatakan banyaknya keturunan yang dihasilkan pada generasi ke-*n* dan μ menyatakan nilai harapan dari banyaknya keturunan yang dihasilkan oleh satu individu, maka :

$$E[X_n] = \mu^n$$

Bukti :

$$E[X_n] = E\left[E\left[X_n \mid X_{n-1}\right]\right]$$

$$= E\left[E\left[\sum_{i=1}^{X_{n-1}} Z_i \mid X_{n-1}\right]\right]$$

Sebelumnya akan ditentukan terlebih dahulu nilai harapan dari X_n dengan syarat $X_{n-1} = x_{n-1}$, yaitu :

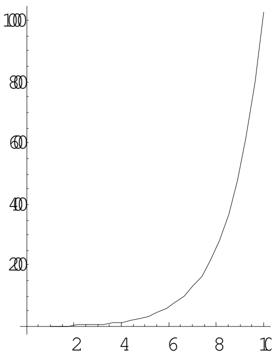
$$E\left[\sum_{i=1}^{X_{n-1}} Z_i \,\middle|\, X_{n-1}\right] = E\left[\sum_{i=1}^{X_{n-1}} Z_i \,\middle|\, X_{n-1} = x_{n-1}\right]$$
$$= E\left[\sum_{i=1}^{x_{n-1}} Z_i \,\middle|\, X_{n-1} = x_{n-1}\right]$$
$$= E\left[\sum_{i=1}^{x_{n-1}} Z_i\right]$$
$$= x_{n-1}E[Z_1]$$

Akibatnya,

$$E[X_n] = E\left[E\left[X_n \,\middle|\, X_{n-1}\right]\right]$$
$$= E\left[E\left[\sum_{i=1}^{X_{n-1}} Z_i \,\middle|\, X_{n-1}\right]\right]$$
$$= E\left[X_{n-1}E[Z_1]\right]$$
$$= E[Z_1]E[X_{n-1}]$$
$$= mE[X_{n-1}]$$
$$= m^2E[X_{n-2}]$$
$$= m^3E[X_{n-3}]$$
$$\vdots$$
$$= m^nE[X_0]$$
$$= m^nE[1]$$
$$= m^n.$$

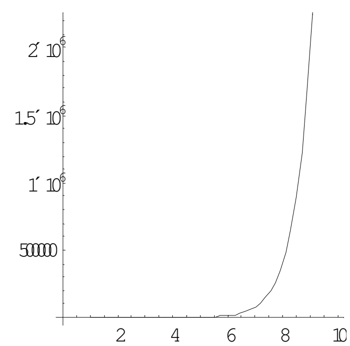
Berikut ini adalah contoh grafik dari nilai harapan suatu ukuran populasi pada generasi ke-*n*, $n = 1, 2, ...$ dengan mengambil sampel nilai $\mu = 2$ dan $\mu = 5$ menggunakan *Mathematica 5.0*.

Untuk nilai $\mu = 2$:



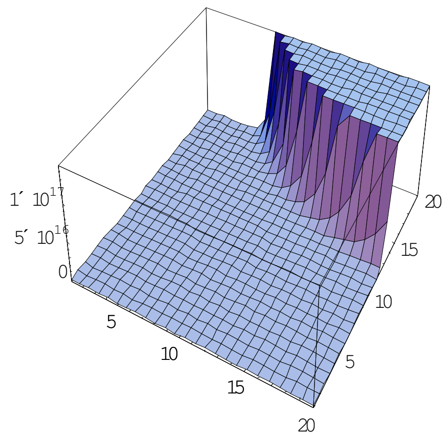
Gambar 1. Grafik nilai harapan ukuran populasi dengan nilai $\mu = 2$

Untuk nilai $\mu = 5$:



Gambar 2. Grafik nilai harapan ukuran populasi dengan nilai $\mu = 5$

Berikut ini adalah contoh grafik 3D dari nilai harapan suatu ukuran populasi pada generasi ke-*n*, $n = 1, 2, ...$ menggunakan *Mathematica 5.0*.



Gambar 3. Grafik 3D dari nilai harapan ukuran populasi

Penentuan Ragam dari Ukuran Populasi pada Generasi ke-*n*

Untuk menentukan ragam dari ukuran populasi pada generasi ke-*n*, $n = 1, 2, \ldots$, diperlukan Lema 2 berikut :

Misalkan X_n menyatakan banyaknya keturunan yang dihasilkan pada generasi ke-*n* dan σ^2 menyatakan ragam dari banyaknya keturunan yang dihasilkan oleh satu individu, maka :

$$Var(X_n) = \mu^{n-1}\sigma^2 + \mu^2 Var(X_{n-1})$$

Adapun ragam dari ukuran populasi pada generasi ke-*n* dapat ditentukan sebagai berikut :

Misalkan X_n menyatakan banyaknya keturunan yang dihasilkan pada generasi ke-*n* dan σ^2 menyatakan ragam dari banyaknya keturunan yang dihasilkan oleh satu individu, maka :

$$Var(X_n) = \begin{cases} \sigma^2 n & ; \mu = 1 \\ \sigma^2 \mu^{n-1}\left(\dfrac{\mu^n - 1}{\mu - 1}\right) & ; \mu \neq 1 \end{cases}$$

Bukti :

Pembuktian dilakukan menggunakan induksi matematika, yaitu :

1) Untuk $n = 1$:
   - Jika $\mu = 1$, maka :
   $$Var(X_1) = \sigma^2(1) = \sigma^2$$
   - Jika $\mu \neq 1$, maka :
   $$Var(X_1) = \sigma^2\mu^0\left(\frac{\mu^1 - 1}{\mu - 1}\right) = \sigma^2$$

   Terbukti benar bahwa $Var(X_1) = \sigma^2$.

2) Andaikan benar untuk $n = k$, sehingga
   - Jika $\mu = 1$, maka $Var(X_k) = \sigma^2 k$
   - Jika $\mu \neq 1$, maka :
   $$Var(X_k) = \sigma^2\mu^{k-1}\left(\frac{\mu^k - 1}{\mu - 1}\right)$$

   Jadi,
   $$Var(X_k) = \begin{cases} \sigma^2 \text{k} & ; \mu = 1 \\ \sigma^2\mu^{k-1}\left(\dfrac{\mu^k - 1}{\mu - 1}\right) & ; \mu \neq 1 \end{cases}$$

3) Akan ditunjukkan bahwa untuk $n = k + 1$, berlaku :
   $$Var(X_{k+1}) = \begin{cases} \sigma^2(\text{k+1}) & ; \mu = 1 \\ \sigma^2\mu^k\left(\dfrac{\mu^{k+1} - 1}{\mu - 1}\right) & ; \mu \neq 1 \end{cases}$$

   - Jika $\mu = 1$, maka berdasarkan Lema 2 :
   $$\begin{aligned} Var(X_{k+1}) &= 1^{(k+1)-1}\sigma^2 + 1^2 Var\left(X_{(k+1)-1}\right) \\ &= \sigma^2 + Var(X_k) \\ &= \sigma^2 + \sigma^2 k \\ &= \sigma^2(k+1) \end{aligned}$$

   - Jika $\mu \neq 1$, maka berdasarkan Lema 2 :

$$Var\left(X_{k+1}\right) = \mu^{(k+1)-1}\sigma^2 + \mu^2 Var\left(X_{(k+1)-1}\right)$$
$$= \mu^k\sigma^2 + \mu^2 Var\left(X_k\right)$$
$$= \mu^k\sigma^2 + \mu^2\left[\sigma^2\mu^{k-1}\left(\frac{\mu^k-1}{\mu-1}\right)\right]$$
$$= \sigma^2\mu^k + \frac{\sigma^2\mu^k\mu^{k+1}}{\mu-1} - \frac{\sigma^2\mu^{k+1}}{\mu-1}$$
$$= \frac{\sigma^2\mu^k(\mu-1)+\sigma^2\mu^k\mu^{k+1}-\sigma^2\mu^{k+1}}{\mu-1}$$
$$= \frac{\sigma^2\mu^{k+1}-\sigma^2\mu^k+\sigma^2\mu^k\mu^{k+1}-\sigma^2\mu^{k+1}}{\mu-1}$$
$$= \frac{\sigma^2\mu^k\mu^{k+1}-\sigma^2\mu^k}{\mu-1}$$
$$= \sigma^2\mu^k\left(\frac{\mu^{k+1}-1}{\mu-1}\right)$$

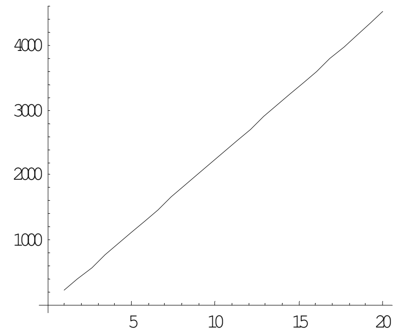
Jadi,

$$Var\left(X_{k+1}\right) = \begin{cases} \sigma^2\,(\mathrm{k+1}) & ; \mu = 1 \\ \sigma^2\mu^k\left(\dfrac{\mu^{k+1}-1}{\mu-1}\right) & ; \mu \neq 1 \end{cases}$$

Dari 1), 2), 3), terbukti bahwa :

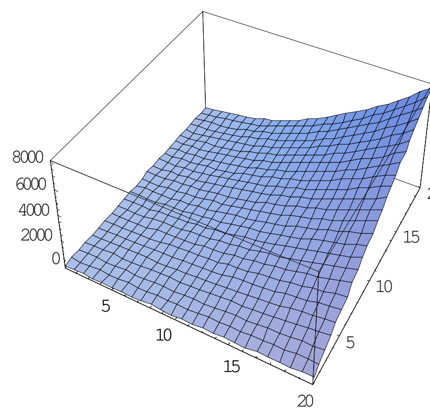
$$Var\left(X_n\right) = \begin{cases} \sigma^2 n & ; \ \mu = 1 \\ \sigma^2\mu^{n-1}\left(\dfrac{\mu^n-1}{\mu-1}\right) & ; \ \mu \neq 1 \end{cases}$$

Berikut ini adalah contoh grafik dari ragam suatu ukuran populasi pada generasi ke-*n*, $n = 1, 2, ...$ untuk $\mu = 1$ dengan mengambil sampel nilai $\sigma = 10$ menggunakan *Mathematica 5.0*.



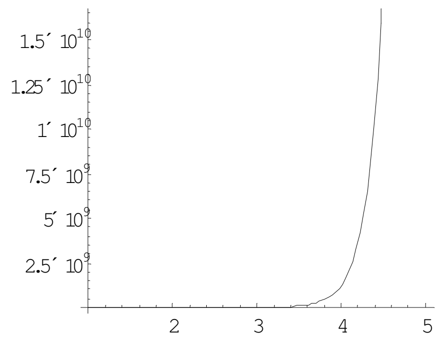
Gambar 4. Grafik ragam ukuran populasi untuk $\mu = 1$ **dan** $\sigma = 10$

Berikut ini adalah contoh grafik 3D dari ragam suatu ukuran populasi pada generasi ke-*n*, $n = 1, 2, ...$ untuk $\mu = 1$ menggunakan *Mathematica 5.0*.



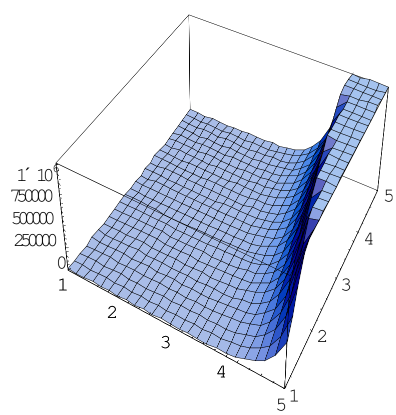
Gambar 5. Grafik 3D dari ragam ukuran populasi untuk $\mu = 1$

Berikut ini adalah contoh grafik dari ragam suatu ukuran populasi pada generasi ke-*n*, $n = 1, 2, ...$ untuk $\mu \neq 1$ dengan mengambil sampel nilai $\sigma = 10$ dan $\mu = 15$ menggunakan *Mathematica 5.0*.



Gambar 6. Grafik ragam ukuran populasi untuk $\sigma = 10$ dan $\mu = 15$

Berikut ini adalah contoh grafik 3D dari ragam suatu ukuran populasi pada generasi ke-*n*, $n = 1, 2, \ldots$ untuk $\mu \neq 1$ dengan mengambil sampel nilai $\mu = 5$ menggunakan *Mathematica 5.0.*



Gambar 7. Grafik 3D dari ragam ukuran populasi untuk $\mu = 5$

Aplikasi Proses Bercabang dalam Penentuan Peluang Bertahan suatu Marga

Peluang bertahan suatu marga ditentukan melalui peluang kepunahannya, yaitu peluang bertahan = 1 - peluang kepunahan. Kepunahan suatu populasi terjadi jika ukuran populasi menurun menuju 0, yang dinotasikan sebagai $X_n = 0$ untuk $n \to \infty$.

Misalkan π_n menyatakan peluang kepunahan pada atau sebelum generasi ke-*n* dan π menyatakan peluang populasi benar-benar punah. Asumsikan bahwa $X_0 = 1$, maka

$$\pi = \lim_{n\to\infty} \pi_n = \lim_{n\to\infty} P\left(X_n = 0 \middle| X_0 = 1\right)$$

Karena populasi awal dengan ukuran X_0 menghasilkan j keturunan, maka ukuran populasi pada generasi ke-1 adalah $X_1 = j$. Peluang populasi punah jika diberikan $X_1 = j$ dinotasikan dengan $P\left(\text{populasi punah} \middle| X_1 = j\right)$ sehingga

$$\pi_n = \sum_{j=0}^{\infty} P\left(\text{populasi punah} \middle| X_1 = j\right) P_j$$

dengan $P_j = P(Z = j)$.

Masing-masing dari j keturunan ini menghasilkan keturunan-keturunan baru sehingga terbentuk j subpopulasi (keluarga). Diketahui bahwa j subpopulasi ini dihasilkan dari individu-individu yang saling bebas dan memiliki sifat statistik yang sama dengan keturunan yang dihasilkan. Oleh karena itu, populasi akan punah jika masing-masing dari j subpopulasi (keluarga) tersebut punah. Karena masing-masing keluarga diasumsikan saling bebas dan peluang sembarang keluarga punah pada generasi ke-*(n-1)* adalah π_{n-1}, maka peluang semua j subpopulasi (keluarga) punah pada generasi ke- *(n-1)* adalah

$$P\left(\text{populasi punah} \middle| X_i = j\right) = \left(\pi_{n-1}\right)^j$$

sehingga untuk setiap $n = 1, 2, 3, \ldots$ dengan $\pi_0 = 0$ diperoleh

$$\pi_n = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\pi_{n-1}\right)^j P_j$$

Peluang kepunahan tersebut dapat dituliskan dalam fungsi pembangkit peluang sebagai berikut :

$$\pi_n = G(\pi_{n-1})$$

dengan G menyatakan fungsi pembangkit peluang dari Z.

Apabila ke-2 bentuk tersebut disamakan, maka diperoleh :

$$G(\pi_{n-1}) = \sum_{j=0}^{\infty} (\pi_{n-1})^j P_j \quad .$$

Adapun penentuan peluang populasi punah beserta aturannya diberikan pada teorema berikut :

Misalkan G menyatakan fungsi pembangkit peluang dari banyaknya keturunan yang dihasilkan oleh satu individu dan misalkan pula fungsi tersebut terdefinisi pada [0,1]. Jika π menyatakan peluang populasi punah, maka :

a) π adalah akar terkecil tak negatif dari persamaan $S = G(S)$

b) Jika $E[Z] = \mu < 1$, dengan μ adalah nilai harapan dari banyaknya keturunan yang dihasilkan oleh satu individu, maka $\pi = 1$.

Contoh Kasus

Dalam penelitian ini, diambil Marga X yang nama marganya hanya diwariskan melalui keturunan laki-laki. Asumsi yang digunakan agar dapat menggunakan proses bercabang selain yang dipakai dalam pemodelan adalah tidak adanya imigrasi atau emigrasi dari wilayah yang dijadikan sampel sehingga dapat diprediksi melalui peluang bertahan marga tersebut di wilayah tersebut.

Berdasarkan data yang diperoleh, setiap individu tidak memiliki lebih dari dua keturunan laki-laki. Peluang setiap individu memiliki 0, 1, dan 2 keturunan laki-laki adalah berturut-turut 0.15, 0.36, dan 0.49. Untuk menentukan peluang bertahan Marga X di wilayah Jakarta Timur dapat dicari melalui bantuan teorema sebelumnya dengan langkah-langkah sebagai berikut.

Diketahui :

$$\begin{aligned} P(Z=0) &= 0.15 \\ P(Z=1) &= 0.36 \\ P(Z=2) &= 0.49 \\ P(Z \geq 2) &= 0 \end{aligned}$$

sehingga

$$\begin{aligned} G(S) &= \sum_{j=0}^{\infty} S^j P(Z=j) \\ &= S^0 P(Z=0) + S^1 P(Z=1) + S^2 P(Z=2) \\ &= 0.15 + 0.36S + 0.49S^2. \end{aligned}$$

Selanjutnya, akan ditentukan akar dari persamaan $S = G(S)$, yaitu :

$$\begin{aligned} & S = 0.15 + 0.36S + 0.49S^2 \\ & \Leftrightarrow 0.49S^2 - 0.64S + 0.15 = 0 \\ & \Leftrightarrow S_1 = 1.0417 \text{ atau } S_2 = 0.3125 \end{aligned}$$

sehingga diperoleh $\pi = 0.3125$ (akar terkecil tak negatif), maka peluang bertahan Marga X di wilayah Jakarta Timur adalah *1*- peluang punah $= 1 - 0.3125 = 0.6875$ atau sekitar 68.75%. Hal ini menunjukkan bahwa marga tersebut diprediksikan masih berpeluang besar untuk meneruskan keturunannya di wilayah tersebut.

PENUTUP

Kesimpulan

Sifat-sifat statistika dari proses bercabang adalah (1) Nilai harapan dari banyaknya keturunan yang dihasilkan pada generasi ke-n adalah

$$E[X_n] = \mu^n$$

Adapun grafiknya yang diperoleh menggunakan *Mathematica 5.0* terlihat naik, serta (2) Ragam dari banyaknya keturunan yang dihasilkan pada generasi ke-n adalah

$$Var(X_n) = \begin{cases} \sigma^2 n & ; \mu = 1 \\ \sigma^2 \mu^{n-1}\left(\dfrac{\mu^n - 1}{\mu - 1}\right) & ; \mu \neq 1 \end{cases}$$

Adapun grafiknya yang diperoleh menggunakan *Mathematica 5.0* terlihat naik.

Untuk aplikasi proses bercabang dalam penentuan peluang bertahan suatu marga pada contoh kasus Marga X di wilayah Jakarta Timur, diperoleh bahwa peluang bertahan Marga X sebesar 0.6875 atau 68.75% di wilayah Jakarta Timur dengan asumsi tanpa adanya imigrasi dan emigrasi. Hal ini menunjukkan bahwa marga tersebut diprediksikan masih berpeluang besar untuk meneruskan keturunannya di wilayah tersebut.

Saran

Tema dalam penelitian ini dapat diteruskan bagi yang berminat, diantaranya adalah aplikasi proses bercabang untuk Marga X yang ditelusuri dari wilayah tempat tinggal asalnya, serta aplikasi proses bercabang untuk marga satwa langka agar tidak punah.

DAFTAR PUSTAKA

Billingsley, P. 1995. *Probability & Measure***.** Ed. ke-3. New York : John Wiley & Sons.

Casella, G. dan **R. L. Berger.** 1990. *Statistical Inference*. Ed. ke-1. Wadsworth & Brooks/cole. California: Pasific Grove.

Grimmett, G. R. dan **D. R. Stirzaker**. 1992. *Probability and Random Processes.* Ed. ke-2. Oxford: Clarendon Press.

Hogg, R. V. dan **A. T. Craig**. 1995. *Introduction to Mathematics Statistics.* Ed. ke-5. New Jersey : Prentice Hall.

Karlin, S. dan **H. Taylor**.1984. *A First Course in Stochastic Processes*. Ed. ke-2. New York : Academic Press.

Loeve, M. 1962. *Probability Theory.* Ed. ke-3. New Jersey : D. Van Nostrand Company.

Mangku, I Wayan. 2005. Panduan Belajar Mandiri MAT 394 Proses Stokastik. Bogor : Departemen Matematika FMIPA – IPB.

Rolski, T. dkk. 2000. *Stochastic Processes for Insurance and Finance.* New York: John Wiley & Sons.

Ross, S. M. 1996. *Stochastic Processes*. Ed. ke-2. New York : John Wiley & Sons.

Ross, S. M. 2000. *Introduction to Probability Models*. Ed. ke-7. California: Harcourt Academic Press.